Série 2

Exercice 1.
Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$(S) : \begin{cases} 2x + y = 1; \\ 3x + 7y = -2. \end{cases}$$

Exercice 2.
Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8. \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3. \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 2 \\ 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 4x + y + 2z + 3t = 4. \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 5 \\ 10x - 5y + 6z = 1. \end{cases} \qquad (S_5) : \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + 4y + 5z + 2t = 2 \\ 2x + 9y + 8z + 3t = 7. \end{cases}$$

Exercice 3.

1. *Calculer le déterminant suivant (déterminant de Vandermonde)*

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

2. *Soient a, b, c, d des scalaires. On suppose que a, b, c sont deux à deux différents. Montrer qu'il existe des nombres x, y, z uniques tels que*

$$\begin{cases} x + y + z = d, \\ ax + by + cz = d^2, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^3. \end{cases}$$

Calculer x, y, z.

Exercice 4. *On considère le système linéaire :*

$$(S_m) \qquad \begin{cases} mx + y - z = m - 1; \\ x + my + z = m - 1; \\ -x + y + mz = 1 - m. \end{cases}$$

1. *Pour quelles valeurs du paramètre m, le système (S_m) est-il de Cramer ?*
2. *Pour $m = 1$, résoudre (S_1).*
3. *Pour $m = 0$, résoudre (S_0).*

Correction Serie 2

Correction exercice 1

$$\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 3x + 7y = -2. \end{cases}$$

- $\underline{\underline{\text{1 ère méthode}}}$: Substitution

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 - 2x; \\ 3x + 7y = -2. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 - 2x; \\ 3x + 7\left(1 - 2x\right) = -2. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 - 2x; \\ -11x = -9. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 - 2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}; \\ x = \frac{9}{11}. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11} \right) \right\}.$$

- $\underline{\underline{\text{2 éme méthode}}}$: Pivot de Gauss

$$\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{array} \right) & & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\
\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -7 \end{array} \right) & & L_1 \leftarrow 11L_1 - L_2 \\
\left(\begin{array}{cc|c} 22 & 0 & 18 \\ 0 & 11 & -7 \end{array} \right), & & L_2 \leftrightarrow L_3
\end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 22x = 18; \\ 11y = -7. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{9}{11}; \\ y = -\frac{7}{11}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11} \right) \right\}.$$

- $\underline{\underline{\text{3 éme méthode}}}$: Inversion de la matrice du système :
(S) admet pour ecriture matritielle $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det\left(A\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11.$$

$$Com\left(A\right) = \begin{pmatrix} +7 & -3 \\ -1 & +2 \end{pmatrix},$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\left(A\right)}{}^{t}\left(Com\left(A\right)\right) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} +7 & -1 \\ -3 & +2 \end{pmatrix},$$

par suite

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} +7 & -1 \\ -3 & +2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/11 \\ -7/11 \end{pmatrix},$$

Donc

$$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11} \right) \right\}.$$

- 4 éme méthode : Cramer
  C'est bien un système de Cramer vu que sa matrice est inversible, donc il admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11}.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}.$$

Donc

$$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11} \right) \right\}.$$

Correction exercice 2

Résolution du système (S_1)

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 8 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Le système (S_1) est équivalent a

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 7z = -7 \\ -5z = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(2, 0, 1)\}.$$

Résolution du système (S_2)

$$(S_2) : \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow -L_3$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2$$

Le système (S_2) est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y + z = 2 \\ z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Donc

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(3, 2, 0)\}.$$

Resolution du système (S_3)

$$(S_3) : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 2 \\ 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 4x + y + 2z + 3t = 4. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1, \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1,$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2, \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 7L_1,$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftrightarrow L_4 + L_3,$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow -\frac{1}{4}L_3,$$

Le système (S_3) est équivalent à

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ -y - 2z - 7t = 2 \\ -4z + 4t = 0. \\ 40t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Donc

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 0, 0)\}.$$

Resolution du système (S_4)

$$(S_4):\begin{cases} x-y+2z=1; \\ -4x+2y+z=3; \\ -2x+y+4z=5; \\ 10x-5y+6z=1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 10 & -5 & 6 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2+4L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3+2L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4-10L_1,$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -14 & -9 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow 2L_3-L_2, \quad L_4 \leftarrow 2L_4+5L_1,$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 7 \end{array}\right) \quad L_4 \leftrightarrow L_4+L_3,$$

Le système (S_4) est équivalent à

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ -2y+9z=7 \\ -9z=-1 \\ -14z=7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 \\ -2y+9z=7 \\ z=\frac{1}{9} \\ z=-\frac{7}{14}. \end{cases}$$

ce qui est impossible, le système (S_4) n'admet pas de solution.

Resolution du système (S_5)

$$(S_5):\begin{cases} x+2y+3z+t=0 \\ x+4y+5z+2t=2 \\ 2x+9y+8z+3t=7. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3-2L_1,$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3-5L_2,$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 4 \end{array}\right) \quad \leftrightarrow$$

Le système (S_5) est équivalent à

$$\begin{cases} x+2y+3z+t=0 \\ 2y+2z+t=2 \\ -6z-3t=4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}t-\frac{4}{3} \\ y=\frac{5}{3} \\ z=-\frac{1}{2}t-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$S_{\mathbb{R}^4}=\left\{\left(\frac{1}{2}t-\frac{4}{3}\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ -\frac{1}{2}t-\frac{2}{3}\ ,\ t\right)\quad ,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Correction exercice 3

$$D(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

1.

$$
\begin{aligned}
\det\left(D\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1, \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} \quad ondéveloppeselon L_1 \\
&= 1 \times \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \left(\beta-\alpha\right)\left(\beta+\alpha\right) & \left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma+\alpha\right) \end{vmatrix} \\
&= \left(\beta-\alpha\right)\left(\gamma-\alpha\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \left(\beta+\alpha\right) & \left(\gamma+\alpha\right) \end{vmatrix} \\
&= \left(\beta-\alpha\right)\left(\gamma-\alpha\right)\left[\left(\gamma+\alpha\right)-\left(\beta+\alpha\right)\right] \\
&= \left(\beta-\alpha\right)\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right).
\end{aligned}
$$

2.

$$
\left\{
\begin{array}{c}
x+y+z=d, \\
ax+by+cz=d^2, \\
a^2x+b^2y+c^2z=d^3.
\end{array}
\right.
$$

Le système admet pour écriture matricielle $AX=B$, avec

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} d \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}.
$$

On a

$$
\det\left(A\right) = \det\left(D\left(a,b,c\right)\right) = \left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right) \neq 0,
$$

vu que a, b, c sont deux à deux différents. Le système est donc de Cramer, par suite, il admet une solution unique donnée par

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} \\
&= \frac{1}{\det\left(A\right)} \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ d^2 & b & c \\ d^3 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{\det\left(A\right)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= d\frac{D\left(d,b,c\right)}{D\left(a,b,c\right)} \\
&= \frac{d\left(b-d\right)\left(c-d\right)\left(c-b\right)}{\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)} \\
&= \frac{d\left(b-d\right)\left(c-d\right)}{\left(b-a\right)\left(c-a\right)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} \\
&= \frac{1}{\det\left(A\right)} \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ a & d^2 & c \\ a^2 & d^3 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{\det\left(A\right)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= d\frac{D(a,d,c)}{D(a,b,c)} \\
&= \frac{d(d-a)(c-d)(c-a)}{(b-a)(c-b)(c-a)} \\
&= \frac{d(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ a & b & d^2 \\ a^2 & b^2 & d^3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{\det(A)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{D(a,b,d)}{D(a,b,c)} \\
&= \frac{d(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\
&= \frac{d(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.
\end{aligned}$$

Correction Exercice 4. On considère le système linéaire :

$$(S_m) \qquad \begin{cases} mx + y - z = m-1; \\ x + my + z = m-1; \\ -x + y + mz = 1-m. \end{cases}$$

1. (S_m) admet pour écriture matricielle $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} m-1 \\ m-1 \\ 1-m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1, \\
&= \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_3, \\
&= \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 \end{vmatrix} \quad ondéveloppeselonL_3 \\
&= (m+1)\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&= (m+1)[m(m-1)-2] \\
&= (m+1)\left[m^2 - m - 2\right] \\
&= m^2 - 2m - 3, \quad équ2nddegrétqa - b + c = 0 \\
&= (m+1)(m-3) \quad , m' = -1, \quad m'' = -c/a
\end{aligned}$$

$$m^2 - m - 2, \quad équ2nddegrétqa - b + c = 0,$$

ce qui donne

$$m' = -1, \quad m'' = -\frac{c}{a} = 2,$$

donc

$$\det(A) = (m+1)^2 (m-2).$$

Le système (S_m) est de Cramer ssi $m \neq -1$ et $m \neq 2$

2. Pour $m = 1$,

$$(S_1) \qquad \begin{cases} x + y - z = 0; \\ x + y + z = 0; \\ -x + y + z = 0. \end{cases}$$

on a $m \neq -1$ et $m \neq 3$, donc c'est un système de Cramer, par suite il admet une solution unique. Il est claire que $(0,0,0)$ est une solution de (S_1) et elle est l'unique.

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(0,0,0)\}.$$

3. Pour $m = 0$,

$$(S_0) \qquad \begin{cases} y - z = -1; \\ x + z = -1; \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

on a $m \neq -1$ et $m \neq 3$, donc c'est un système de Cramer, par suite il admet une solution unique.

$$\begin{aligned} (S_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = z - 1; \\ x = -z - 1; \\ -(-z-1) + (z-1) = 1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}; \\ x = -\frac{3}{2}; \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$